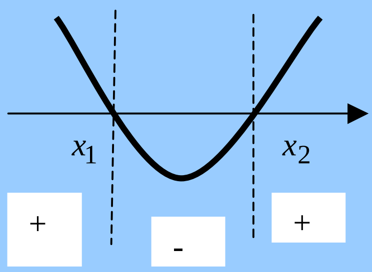
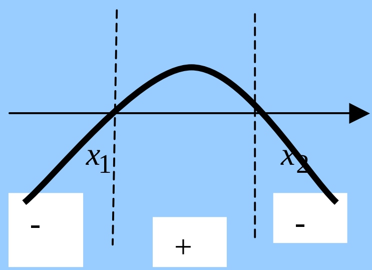
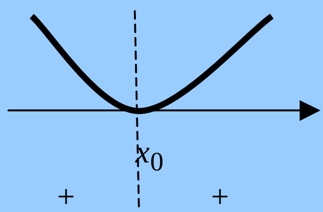
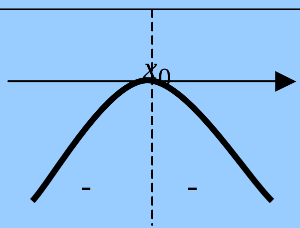
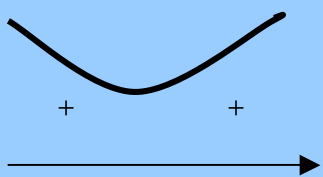
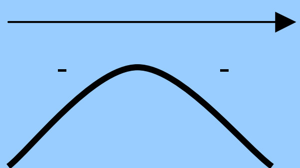
4.4. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

<table>
<tr><td colspan="4">Liczba rozwiązań (pierwiastków) równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$
zależy od znaku Δ.</td></tr>
<tr><td>Znak wyróżnika</td><td>$\Delta>0$</td><td>$\Delta=0$</td><td>$\Delta<0$</td></tr>
<tr><td>Rozwiązania (pierwiastki) równania kwadratowego</td><td>dwa rozwiązania
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>jedno rozwiązanie
$x_0=\frac{-b}{2a}$</td><td>nie ma miejsca rozwiązania</td></tr>
</table>

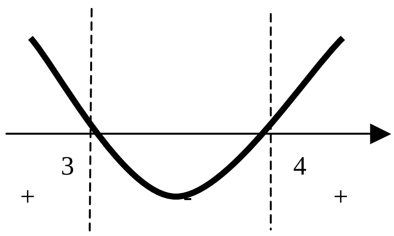
<u>Przykład 4.4.1.</u> Rozwiąż równanie : $(x-5)^2=2(x-5)(x+4)$

Rozwiązanie	**Komentarz**
$(x-5)^2=2(x-5)(x+4)$ $x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2=2(x^2+4x-5x-20)$ $x^2-10x+25=2x^2+8x-10x-40$	Usuwamy nawiasy , wykonując mnożenie. Do obliczenia $(x-5)^2$ stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$x^2-10x+25-2x^2-8x+10x+40=0$ $-x^2-8x+65=0$	Porządkujemy równanie, przenosząc wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania. Należy pamiętać o zmianie znaku przy przenoszeniu wyrażenia na drugą stronę równania. Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych i doprowadzamy równanie do postaci $ax^2+bx+c=0$
$a=-1; b=-8; c=65$ $\Delta=(-8)^2-4\cdot(-1)\cdot 65=64+260=324$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczmy Δ**.**
$x_1=\frac{-(-8)-\sqrt{324}}{2\cdot(-1)}=\frac{8-18}{-2}=\frac{-10}{-2}=5$ $x_2=\frac{-(-8)+\sqrt{324}}{2\cdot(-1)}=\frac{8+10}{-2}=\frac{18}{-2}=-9$ Równanie ma dwa rozwiązania: 5, - 9	Ponieważ $\Delta>0$**,**to równanie ma dwa rozwiązania, które obliczmy ze wzorów $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

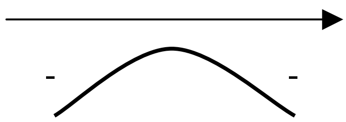
Warunki	Parabola i znaki funkcji kwadratowej	Rozwiązania nierówności $ax^2+bx+c>0$ $ax^2+bx+c\geq 0$	Rozwiązania nierówności $ax^2+bx+c<0$ $ax^2+bx+c\leq 0$
$a>0$ $\Delta>0$		$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ $x\in(-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty)$	$x\in(x_1,x_2)$ $x\in\langle x_1,x_2\rangle$
$a<0$ $\Delta>0$		$x\in(x_1,x_2)$ $x\in\langle x_1,x_2\rangle$	$x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ $x\in(-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty)$
$a>0$ $\Delta=0$		$x\in(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$ $x\in R$	$x\in\varnothing$ $x\in\{x_0\}$
$a<0$ $\Delta=0$		$x\in\varnothing$ $x\in\{x_0\}$	$x\in(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$ $x\in R$
$a>0$ $\Delta<0$		$x\in R$ $x\in R$	$x\in\varnothing$ $x\in\varnothing$
$a<0$ $\Delta<0$		$x\in\varnothing$ $x\in\varnothing$	$x\in R$ $x\in R$

Przykład 4.4.2. Rozwiąż nierówności:

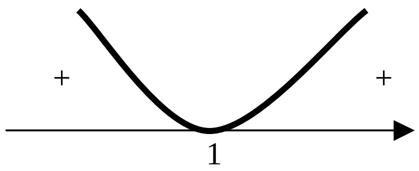
a) $x^2 > 7x - 12$

Rozwiązanie	Komentarz
$x^2 - 7x + 12 > 0$	Nierówność doprowadzamy do postaci $ax^2 + bx + c > 0$, przenosząc wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania.
$a = 1; b = -7; c = 12$ $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczmy Δ.
$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7-1}{2} = 3$ $x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7+1}{2} = 4$	Obliczamy miejsca zerowe trójmianu $x^2 - 7x + 12$ korzystając ze wzorów $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (Ponieważ $\Delta > 0$, to trójmian ma dwa miejsca zerowe)
	Sporządzamy szkic wykresu trójmianu $x^2 - 7x + 12$
$x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$	Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności $x^2 - 7x + 12 > 0$. Rozwiązaniem nierówności są te argumenty dla których trójmian $x^2 - 7x + 12$ jest dodatni

b) $-x^2 < 4$

Rozwiązanie	Komentarz
$-x^2 - 4 < 0$	Nierówność doprowadzamy do postaci $ax^2 + bx + c > 0$, przenosząc wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania.
$a = -1; b = 0; c = -4$ $\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = -16$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczmy Δ.
Brak miejsca zerowego.	Ponieważ $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa $-x^2 - 4$ nie ma miejsca zerowego.
	Sporządzamy szkic wykresu trójmianu $-x^2 - 4$
$x \in R$	Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności $-x^2 - 4 < 0$. Rozwiązaniem nierówności są te argumenty dla których trójmian $-x^2 - 4$ jest ujemny.

c) $\frac{x^2-1}{6}-\frac{x}{3}\le\frac{-1}{3}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{x^2-1}{6}-\frac{x}{3}\le\frac{-1}{3} \quad /\cdot 6$ $6\cdot\frac{x^2-1}{6}-6\cdot\frac{x}{3}\le 6\cdot\frac{-1}{3}$ $x^2-1-2x\le -2$ $x^2-2x+1\le 0$	Nierówność doprowadzamy do postaci $ax^2+bx+c>0$, mnożąc obie strony równania przez wspólny mianownik 6, a następnie przenosząc wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania.
$a=1; b=-2; c=1$ $\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot1=0$	Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczmy Δ.
$x_0=\frac{-(-2)}{2\cdot1}=1$	Obliczamy miejsce zerowe trójmianu x^2-2x+1 korzystając ze wzoru $x_0=\frac{-b}{2a}$ (Ponieważ $\Delta=0$, to trójmian ma jedno miejsce zerowe)
	Sporządzamy szkic wykresu trójmianu x^2-2x+1
$x\in\{1\}$	Z wykresu odczytujemy rozwiązanie nierówności $x^2-2x+1\le 0$. Rozwiązaniem nierówności są te argumenty dla których trójmian x^2-2x+1 jest niedodatni.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 4.4.1. Rozwiąż równania:

a) (2pkt.) $(x-1)^2=2(x-1)(x+4)+25$

b) (2pkt.) $\frac{x^2+5x}{3}-\frac{(x+2)^2}{4}=x-1$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Doprowadzenie równania do postaci $ax^2+bx+c=0$	1
2	Podanie pierwiastków równania $ax^2+bx+c=0$	1

Ćwiczenie 4.4.2. Rozwiąż nierówność:

a) (2pkt.) $-4x^2+5x+9 \le 0$

b) (2pkt.) $x^2-8x+16>0$

c) (2pkt.) $3x^2+x+5 \ge 0$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie miejsc zerowych trójmianu ax^2+bx+c	1
2	Podanie rozwiązania nierówności.	1